Probabilités

Les cours et réponses aux exercices sont téléchargeables sur le site ***MathEnSeconde.fr***

Questions inaugurales

1

a) Selon vous, le hasard pur existe-t-il ?

b) Que veut dire « probable », selon vous ?

c) Décrire un « jeu » de hasard où l'on a une chance sur deux de gagner.

d) Idem avec deux chances sur trois.

On lance un dé cubique non truqué.

e) Est-on sûr d'avoir un *six* ?

f) Quelles sont les chances de tomber sur *six* ? Et sur *un* ? Est-on sûr de cette réponse ?

On jette deux dés.

g) Est-ce que cela revient au même de les jeter l'un après l'autre que de les jeter simultanément ?

h) Quelles sont les chances qu'ils tombent tous deux sur *six* ?

i) Quelles sont les chances qu'ils tombent tous deux sur un même numéro ?

On lance une pièce non truquée.

j) Quelles sont les chances qu'elle tombe sur *pile* ?

k) On lance cinq fois la pièce. Elle est tombée sur *pile* les quatre premières fois. Quelles sont les chances qu'elle tombe encore sur *pile* la cinquième ?

l) Par une certaine nuit, si l'on attend une heure, on a une chance sur deux de voir passer au moins une étoile filante. Est-on sûr d'en voir passer une si l'on attend deux heures ?

m) Il y a trois chances sur dix pour que Cunégonde vienne me voir demain. Quelles sont les chances pour qu'elle ne vienne pas ?

n) Ma femme et moi avons joué à une loterie où il n'y aura qu'un seul gagnant. J'ai 3% de chances de gagner. Mon épouse, qui a acheté plus de tickets, a 5% de chances de gagner. Quelle est la probabilité pour que l'un de nous deux gagne ?

o) Je joue à une loterie où j'ai 3% de chances de gagner. Mon épouse joue à une autre loterie où elle a 5% de chances de gagner. Quelle est la probabilité pour que nous gagnions tous les deux ?

Éventualités

2

On lance deux dés cubiques classiques. Dire combien il y a de cas possibles selon chaque point de vue proposé :

a) On ne s'intéresse qu'à la somme des points.

b) On considère séparément les deux numéros sortis. Et l'on distingue les deux dés (disons qu'ils ont des couleurs différentes).

c) On considère les deux numéros, mais sans distinguer les dés. Si un dé donne 3 et l'autre 4, c'est pareil que si l'on permute : 4 et 3.

d) On s'intéresse à la distance entre les centre de gravité deux dés, sans prendre en compte les numéros qui sortent.

3

On lance trois pièces. Dire combien il y a de cas possibles selon chaque point de vue proposé :

a) On ne distingue pas les pièces ni l'ordre des lancers.

b) On distingue les trois pièces (ou alors l'ordre des lancers, cela revient au même).

4

Une urne contient deux boules noires et trois boules blanches. Dire combien il y a de cas possibles selon chaque point de vue proposé :

a) On tire une boule, on ne s'intéresse qu'à sa couleur.

b) On tire une boule, en *distinguant les boules* (on signifie par là qu'on les distingue les unes des autres, en les numérotant au marqueur, par exemple).

c) On tire *successivement* deux boules (l'ordre des tirages compte). On ne s'intéresse qu'à la couleur.

d) On tire *simultanément* deux boules (l'ordre des tirages ne compte pas). On ne s'intéresse qu'à la couleur.

e) On tire successivement deux boules, avec remise (on remet la première boule dans l'urne avant le second tirage), en distinguant les boules.
f) On tire deux boules successivement, sans remise, en distinguant les boules.
g) On tire deux boules simultanément (donc sans remise, évidemment). On distingue les boules les unes des autres.

Événement

5

On lance deux fois un dé à quatre faces (tétraèdre), numérotées de 1 à 4.

Écrire l'univers des possibilités Ω.

Écrire en extension les événements suivants :

A : « Il sort un 2 puis un 3. »
B : « Il sort un 2 et un 3. »
C : « Il sort deux fois le même numéro. »
D : « Le premier numéro est un 4. »

6

On lance successivement trois pièces.

Écrire l'univers des possibilités Ω.

Écrire en extension les évènements suivants :

A : « La première pièce et elle seulement, tombe sur pile. »
B : « Les trois résultats sont identiques. »
C : « Il sort exactement un *pile*. »
D : « La première pièce tombe sur *pile*. »

Probabilité d'un événement

7

Répondre sans justifier.

a) On lance une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité de tomber sur *pile* ?
b) On lance un dé bien équilibré à six faces. Quelle est selon vous la probabilité de tomber sur le numéro 1 ? Et sur le numéro 2 ? Quelle est la probabilité que le résultat soit strictement inférieur à 3 ?
c) Une urne contient trois boules noires et deux boules blanches indiscernables au toucher. On tire une boule (sans regarder). Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

Équiprobabilité

8

Y a-t-il équiprobabilité ?

a) On jette un dé bien équilibré et l'on s'intéresse au numéro sorti.
b) On jette un dé pipé (truqué) et l'on s'intéresse au numéro sorti.
c) On jette deux dés bien équilibrés, et l'on s'intéresse à la somme des points.
d) On jette deux dés bien équilibrés, que l'on distingue, et l'on s'intéresse séparément aux deux numéros sortis.
e) On tire un boule dans une urne contenant trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher et l'on s'intéresse uniquement à la couleur de la boule.
f) On tire un boule dans l'urne de la question précédente, mais on a numéroté préalablement les boules au marqueur et l'on s'intéresse cette fois au numéro de la boule tirée.
g) On lance dix pièces et l'on s'intéresse au nombre de *pile*.

Dans chacun des exercices suivants (de ce paragraphe), on commencera par modéliser l'expérience aléatoire en définissant précisément un univers, que nous noterons Ω, de façon à nous placer dans une situation d'équiprobabilité.

9

On lance un dé bien équilibré.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

A : « Il sort un 6. »

B : « Il sort un numéro impair. »

10

Dans une urne, se trouvent 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'on tire une boule blanche ? (On notera E cet événement.)

11

Dans une urne, se trouvent 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On procède à deux tirages successifs, avec *remise* (on *remet* la boule avant le second tirage). Quelle est la probabilité pour qu'on tire deux boules noires ? (On notera E cet événement.)

12

On lance deux pièces.

Quelle est la probabilité pour que :

A : On obtienne deux *pile* ?

B : Les deux pièces tombent du même côté ?

C : On obtienne au moins un *pile*.

13

On jette un même dé à deux reprises. Donner la probabilité pour que :

A : « Il sorte un 1 puis un 2 ».

B : « Il sorte un 1 et un 2, peu importe dans quel ordre. »

C : « Il sorte deux fois un 1. »

14

On lance simultanément deux dés.

Donner la probabilité pour que les numéros :

A : Soient consécutifs.

B : Aient une somme égale à 12.

C : Aient une somme égale à 7.

Opérations

15

On tire au sort un couple d'humains mariés. On pose les événements suivants :

E : « Le couple a exactement un enfant. »

F : « Le couple a au moins une fille. »

G : « Le couple a au moins un garçon. »

1- Exprimer en compréhension et le plus simplement que vous pouvez les événements suivants :
   a) $E \cap F$
   b) $F \cup G$
   c) $\overline{F}$
   d) $E \cup \overline{F}$

2- Exprimer avec des opérations ensemblistes portant sur E, F et G :
   a) Le couple n'a pas d'enfant.
   b) Le couple a au moins deux enfants.

3- a) E est-il compatible avec $F \cap G$?
   b) $\overline{E}$ est-il compatible avec $F \cap G$?

16

On lance trois pièces. Et l'on pose les événements suivants :

E : « Il y a au moins un *pile*. »

F : « Il y a exactement un *pile*. »

G : « Les trois pièces affichent le même résultat. »

1- Exprimer *en compréhension* et le plus simplement que vous pouvez les événements suivants :
   a) « E et G »
   b) « non E »
   c) « E ou F »
   d) « non(F ou G)
   e) E et (non G)

2- a) Les événements E et F sont-ils compatibles ?
   b) Les événements F et G sont-ils compatibles ?

17

On tire au sort, l'un après l'autre, deux entiers compris entre 1 et 1000 (inclus). Il se peut qu'on tire deux fois le même. On note :

A : « Le second entier est supérieur ou égal au premier. »

B : « Le second entier est inférieur ou égal au premier. »

1- a) Combien y a-t-il de possibilités ?

b) Comment représenter l'univers Ω des possibilités ?

c) Donner un élément appartenant à A.

d) Les événements A et B sont-ils compatibles ?

2- Exprimer par une phrase en français chacun des événements suivants :

a) $A \cap B$

b) $\overline{A}$

c) $\overline{A \cap B}$

d) $\overline{A} \cup \overline{B}$

Axiomes

18

Merlin va transformer une pierre en un animal. Il ne maîtrise pas complètement ce qui va se passer et ne sait pas exactement quel animal va apparaître. Il sait seulement qu'il y a 20% de chances que l'animal soit une baleine et 10% de chances qu'il soit un chat.

a) Quelle est la probabilité que ce soit un animal, qui apparaisse ?

b) Quelle est la probabilité que l'animal soit une baleine ou un chat ?

c) Peut-il y avoir 80% de chances que l'animal soit un chien ?

Théorèmes

19

On lance cinq pièces. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins un *pile* ?

Notons E cet événement (« il y a au moins un *pile* »). On commencera par définir précisément l'univers Ω choisi.

20

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué, pour chaque *enseigne* (cœur, carreau, pique, trèfle), de 3 figures (valet, dame, roi) et de 5 'numéros' : As, 7,8,9,10.

a) Donner sans explication la probabilité d'obtenir :
A : une figure
B : une rouge
C : une figure rouge

b) En déduire la probabilité d'obtenir :
D : une figure ou une rouge
E : soit une figure, soit une rouge, mais pas les deux.

21

Une certaine année, la probabilité pour qu'un homme donné, vivant en couple, contracte la grippe est de 10 % et il en est de même pour son épouse. La probabilité pour que le mari et sa femme soient tous les deux atteints serait de 1 % si leurs deux cas étaient indépendants ; mais en raison de la contagion, nous supposerons que la probabilité que les deux soient atteints est en fait de 5 %.

a) Quelle est alors la probabilité pour que l'un des deux au moins soit atteint ?

b) Et la probabilité pour que ni l'un ni l'autre ne le soient ?

22

La probabilité qu'il pleuve le 1er avril prochain est de $\frac{1}{3}$ et de même pour la probabilité qu'il pleuve le 2 avril. Néanmoins, les deux événements n'étant pas indépendants, la probabilité qu'il pleuve le 1er <u>et</u> le 2 n'est pas de $\frac{1}{9}$. Supposons qu'elle soit de $\frac{2}{9}$.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il pleuve le 1er ou le 2 (ou les deux) ?

b) Quelle est alors la probabilité pour qu'il ne pleuve ni le 1er ni le 2 ?

(Les probabilités données en hypothèse dans cet exercice sont plausibles, mais ne sont pas issues de données météorologiques très précises.)

23

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

a) Donner sans explication la probabilité d'obtenir :

A : une dame

B : un cœur

C : la dame de cœur

b) En déduire la probabilité d'obtenir :

D : une dame ou un cœur

E : ni une dame ni un cœur

24

On lance deux fois un même dé.

a) Donner sans explication la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le premier numéro est un 6. »

B : « Le second numéro est un 6. »

C : « Il sort deux fois un 6. »

b) En déduire les probabilités des événements :

D : « L'un des deux numéros au moins est un 6. »

E : « Un seul des deux numéros est un 6. »

Simulations

25

On jette deux dés et l'on s'intéresse à la somme des points. Simuler cette expérience sur votre calculatrice, en une seule ligne, si possible. La somme des points doit s'afficher. On pourra utiliser la fonction « entAléat(,) ».

26

On tire 10 fois à pile ou face. On s'intéresse au nombre de fois où il sort « pile ». Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et affiche le nombre en question.

27

Dans une urne contenant trois boules noires et sept boules blanches, on effectue deux tirages avec remise. On s'intéresse à la couleur des boules tirées. Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et affiche les couleurs des boules tirées.

Probabilités et dénombrement

Dans ce paragraphe, la rédaction n'est pas exigée. En revanche, on donnera une expression de la solution avant tout calcul.

28

On fabrique un 'mot' en tirant au sort trois lettres, successivement, de façon équiprobable, parmi les 27 lettres de l'alphabet, avec possibilité de répétition. Évidemment, cela peut donner un 'mot' qui n'a aucun sens, comme « aui » ou « *zzz* ». Quelle est la probabilité pour qu'on tombe sur le mot « mot » ?

29

On fabrique un 'mot' en tirant au sort trois lettres, successivement, de façon équiprobable, parmi les 27 lettres de l'alphabet, sans possibilité de répétition : considérons que chaque lettre est imprimée sur une carte et qu'on tire, dans un certain ordre, 3 cartes parmi 27. Lorsqu'une lettre est tirée, elle ne peut pas l'être une seconde fois.
Quelle est la probabilité pour qu'on tombe sur le mot « mot » ?

30

On aligne des étiquettes numérotées de 1 à 5, selon un ordre aléatoire. Cela peut donner, par exemple :

1	3	4	5	2

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « On obtient les 5 numéros dans l'ordre croissant (dans le sens de la lecture). »

B : « Le 1 et le 2 se retrouvent à côté l'un de l'autre. »

31

On jette dix fois de suite une pièce. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 2 *pile* exactement ?

Commencer par écrire un algorithme qui simule 100 répétitions de cette expérience et affiche finalement la fréquence de l'événement considéré.

32

A faire au brouillon.

Ce soir, au souper, Candide, Pangloss, Monsieur le Baron, Madame la Baronne, leur fils, et leur fille Cunégonde, seront disposés au hasard autour de la table ronde. Quelle est la probabilité pour que Candide et Cunégonde soient assis à côté ?

Arbres

33

Urne, sans remise.

Dans une urne contenant deux boules blanches et trois noires, on tire successivement et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes ?

On résoudra ce problème de deux façons : d'abord en s'aidant d'un « arbre », puis, pour vérifier, par une modélisation équiprobable.

34

Urne, sans remise.

Dans une urne contenant deux boules blanches et trois noires, on tire successivement et sans remise deux boules. La seconde boule a-t-elle la même probabilité que la première d'être une blanche ?

Attention, lorsqu'on parle de la probabilité que la seconde boule a d'être blanche, on entend par là : sans supposer que la première boule l'est forcément. On se place du point de vue d'un observateur situé temporellement au début de l'expérience, avant le premier tirage.

35

Probabilités conditionnelles.

On dispose de trois cartes (de même format) numérotées 1, 2 et 3. On tire au sort une première carte, que l'on remet ; mais on enlève ensuite les numéros strictement supérieurs au premier tiré (s'il y en a). On tire ensuite au sort un numéro parmi ceux qui restent. Quel est la probabilité que le second numéro soit un 1 ?

36

Une urne contient deux boules rouges et trois boules bleues indiscernables au toucher. On tire une première boule. Si elle est rouge, on la remet dans l'urne, si elle est bleue, on ne la remet pas. Dans les deux cas, on tire ensuite une seconde boule. Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit rouge ? On exprimera la réponse en pourcentage.

37

Dans le noyau atomique, le neutron est généralement stable. Mais isolé, il est instable : à tout instant, un neutron isolé a une chance sur deux de se désintégrer dans les dix minutes qui suivent. Ce délai se nomme la *demi-vie* d'une particule (en anglais : *half-life*). Quelle est la probabilité pour qu'un neutron isolé, considéré à un instant donné, se désintègre au cours des vingt minutes qui suivent ?

38

Je joue à une loterie où j'ai 3% de chances de gagner. Mon épouse joue à une autre loterie où elle a 5% de chances de gagner. Quelle est la probabilité pour que l'un de nous deux au moins gagne ?

39

Dans une urne contenant deux boules noires et trois boules blanches, on effectue deux tirages <u>sans remise</u>. On s'intéresse à la couleur des boules tirées. Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et affiche les couleurs des boules tirées.

Exercices supplémentaires

40

On jette quatre dés cubiques bien équilibrés.

Quelle est la probabilité pour qu'ils tombent tous sur la même face ?

41

On jette quatre dés cubiques bien équilibrés.

Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne plusieurs fois un même numéro ?

(Si un même numéro apparaît trois fois ou quatre fois, ou si deux dés indiquent un même numéro et les deux autres un autre même numéro, l'événement « il apparaît plusieurs fois un même numéro » est supposé satisfait.)

42

Une secrétaire rédige quatre lettres et prépare quatre enveloppes avec les adresses de chaque destinataire (quatre destinataires différents). Prise d'une soudaine fantaisie, elle insère les lettres dans les enveloppes (une lettre dans chaque enveloppe) sans se préoccuper de leurs destinataires. Quelle est la probabilité pour que les quatre lettres arrivent quand même aux bons destinataires ?

43

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes trois de la même couleur ?

44

Le problème de Monty Hall.

Le candidat est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (et une chèvre derrière chacune des deux autres). Le candidat choisit une porte. Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre alors une autre porte, derrière laquelle il sait qu'il y a une chèvre. Le candidat a la possibilité de modifier son choix. A-t-il intérêt à le faire ? (On supposera que le candidat préfère une voiture à une chèvre.)

Approfondissements

45

Politique démographique et répartition des sexes.

Au cours des années 80 (plutôt seconde partie), en Chine, dans la plupart des provinces et en milieu rural, les autorités ont autorisé les couples à avoir un second enfant seulement lorsque le premier était une fille.

a) Supposons que chaque couple ait une chance sur deux d'avoir une fille, que les couples respectent les directives tout en ayant un enfant dès qu'ils y sont autorisés et qu'il n'y ait pas d'avortement pratiqué en fonction du sexe de l'embryon. Cette politique modifierait-elle la répartition des sexes dans la population ?

b) Supposons à présent que la probabilité pour couple d'avoir un garçon ou une fille n'est pas la même. Et en effet, le rapport est de 105 garçons pour 100 filles dans l'espèce humaine (avec quelques variations observées dans certaines populations et périodes). Pour simplifier les calculs, on pourra caricaturer la différence en supposant 3/4 de chances d'avoir un garçon. Dans ce cas, la répartition des sexes va-t-elle être modifiée par la politique en question ? Si oui, comment ?

c) Dans la pratique, quelques études statistiques porteraient à croire qu'un couple qui a eu une fille pour premier enfant a <u>un peu</u> plus de chance de concevoir une fille en seconde naissance qu'un couple qui a eu un garçon. (Même si ce n'est pas très significatif). Pouvez-vous proposer une hypothèse « simple » pour expliquer ce phénomène ?

Pour une étude plus poussée, on pourra consulter l'article : *Déterminants démographiques du rapport de masculinité à la naissance dans la population du Saguenay (Québec, Canada).*

46

Trois frères participent à des loteries différentes. Leurs chances de gagner est de 2%, 3% et 4%. Quelle est la probabilité que l'un au moins des trois gagne ? Arrondir au centième de %.

47

On lance dix pièces de monnaie. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne au moins deux *pile* ?

48

Par une certaine nuit, si l'on contemple le ciel une heure durant, on a une chance sur deux de voir passer au moins une étoile filante. Quelles sont les chances d'en voir si l'on attend : qu'une demi-heure ?

Par une certaine nuit, si l'on attend une heure, on a une chance sur deux de voir passer (au moins) une étoile filante.

a) Deux heures ?

b) Une demi-heure ? (Après avoir bien cherché, vous pouvez consulter l'aide, dans la feuille des réponses.)

49

Nombre de coups illimité mais fini.

Deux joueurs lancent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient *pile* gagne. Quelle est la probabilité que le joueur qui commence gagne la partie ?

50

'Premier' problème de Méré

Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir (au moins) un 6 ?

Et un double six avec deux dés ?

51

On achète 5 tickets de loterie, parmi les 100 qui ont été publiés. Quelle est la probabilité de gagner l'un au moins des 3 lots principaux ? On donnera la réponse sous la forme d'un pourcentage, arrondi à la première décimale.
